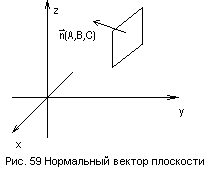
Задание № 14 Уравнение плоскости

*Задание может быть выполнено либо в формате документа Word, либо в виде фотографии выполненного на бумаге решения.*

**Плоскость в пространстве**

Теорема (об общем уравнение плоскости) 1) Любая плоскость в прямоугольной системе координат может быть задана уравнением , где  - некоторые действительные числа. 

2) Любое уравнение вида  при условии  задает в пространстве некоторую плоскость.

Определение: вектор  называется *нормальным вектором* плоскости . В качестве нормального вектора можно использовать любой вектор, перпендикулярный плоскости.

Теорема (о совпадении плоскостей) Уравнения  и  задают одну и ту же плоскость тогда и только тогда, когда .

*Следствие:* Плоскости  и  параллельны тогда и только тогда, когда



Очевидно, что если , то плоскость  проходит через начало координат.

Пусть , тогда нормальный вектор плоскости  лежит в координатной плоскости YOZ и, следовательно, перпендикулярен оси ОХ. Значит, плоскость  параллельна оси ОХ.

Аналогично показывается, что если , то плоскость параллельна оси OY, а если , то плоскость параллельна оси OZ.

Из вышесказанного следует:

* если  и , то плоскость  параллельна координатной плоскости XOY
* если  и , то плоскость  параллельна координатной плоскости XOZ
* если  и , то плоскость  параллельна координатной плоскости YOZ
* если  и , то плоскость  проходит через координатную ось OX
* если  и , то плоскость  проходит через координатную ось OY
* если  и , то плоскость  проходит через координатную ось OZ

Пусть . Преобразуем уравнение : . Переобозначив постоянные, получим *уравнение плоскости «в отрезках»* . При  из последнего уравнения следует, что , при  следует, что  и при  следует: . Значит,  - взятые с соответствующим знаком длины отрезков, отсекаемых плоскостью  от осей координат, поэтому уравнение  называется уравнением плоскости «в отрезках».

Уравнение плоскости, проходящей через данную фиксированную точку  перпендикулярно заданной нормали  можно записать в виде



*Пример:* Составить уравнение плоскости, проходящей через 3 заданные точки: ,  и .

*Решение:* Допустим сначала, что данные три точки не лежат на одной прямой и, следовательно, задача имеет единственное решение. Пусть точка  принадлежит искомой плоскости, тогда векторы ,  и  компланарны. Условие компланарности для этих векторов имеет вид



Раскрыв определитель в левой части равенства и приведя подобные слагаемые, получим уравнение искомой плоскости.

Если точки ,  и лежат на одной прямой, то после раскрытия определителя вместо уравнения получим тождество 0 = 0.

 Основные задачи для плоскости в пространстве

Большинство математических задач для плоскости в пространстве решается при совместном использовании решений основных задач:

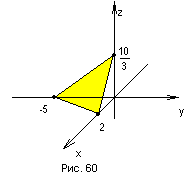
1. Построение плоскости в пространстве по заданному уравнению;
2. Определение уравнения плоскости по заданным условиям;
3. Определение угла между плоскостями. Определение параллельности и перпендикулярности плоскостей;
4. Определение расстояния от заданной точки до заданной плоскости;

Рассмотрим примеры решения указанных задач.

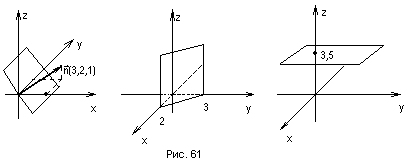
***Пример1:*** построить плоскости в пространстве по уравнениям

а) ; б) ; в) ; г) ;

*Решение:* а) перейдем к уравнению плоскости в отрезках:

. Откладываем на координатных осях отрезки длин  соответственно. Соединяем эти точки отрезками (рис.60).

б) плоскость проходит через начало координат. В системе координат от ее начала строим нормаль к плоскости , а плоскость изображаем перпендикулярно нормали. в) перейдем к уравнению плоскости в отрезках:

.

Поскольку нет слагаемого с координатой , то плоскость будет параллельна оси . г) плоскость отсекает на оси  отрезок длины , две другие оси координат она не пересекает.

***Пример2:*** Дано общее уравнение плоскости ; составить уравнение плоскости, параллельной данной и проходящей через точку ;

*Решение:* Если две плоскости параллельны, то нормальный вектор первой плоскости является нормальным вектором и для второй плоскости. Значит, уравнение искомой плоскости имеет вид ,где  - некоторая, пока неизвестная, постоянная. Для определения этой постоянной подставим в уравнение  координаты точки : . Следовательно,  и искомая плоскость задается общим уравнением .

*Пример3:* Найти угол между плоскостями  и .

*Решение:* угол между плоскостями, очевидно, равен углу между их нормальными векторами. По формуле вычисления косинуса угла между векторами получим формулу косинуса угла между плоскостями:



Из этой формулы, в частности, следует: *Условие перпендикулярности прямых:*

.

*Пример 4:* Найти расстояние от точки  до плоскости, проходящей через точки , , .

Решение: составляем уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки:

.

Раскрывая определитель, получим общее уравнение плоскости .

Воспользуемся формулой расстояния от точки до плоскости:

:

.

**Самостоятельная работа:**

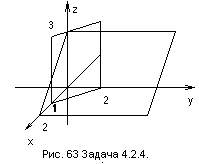
**4.2.1.** Дано общее уравнение плоскости .

а) составить уравнение этой плоскости «в отрезках»;

б) построить эту плоскость в системе координат;

**4.2.2.** Составить уравнение плоскости, изображенной на рис. 62;

**4.2.3.** В пространстве задана точка ;

а) составить уравнение плоскости, проходящей через эту точку перпендикулярно вектору ;

б) составить уравнение плоскости, проходящей через эту точку параллельно векторам  и ;

в) составить уравнение плоскости, проходящей через точки  и  параллельно вектору ;

г) составить уравнение плоскости, проходящей через точки  и  перпендикулярно вектору ;

д) составить уравнение плоскости, проходящей через точки ,  и ;

**4.2.4.** Составить уравнения плоскостей, изображенных на рис.63;

**4.2.5.** В плоскости  задана прямая .

а) составить уравнение плоскости, проходящей через данную прямую и точку ;

б) составить уравнение плоскости, проходящей через данную прямую параллельно оси ;

**4.2.6.** Найти угол между плоскостями

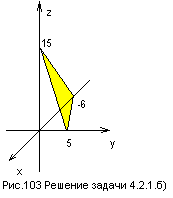
а)  и ;

б)  и ;

**4.2.7.** Плоскость, проходящая через точку , отсекает на осях координат отрезки равной длины. Найти объем пирамиды, ограниченной этой плоскостью и координатными плоскостями.

**4.2.8.** В пространстве заданы четыре точки , ; ; . Сколько существует плоскостей, равноудаленных от этих точек? Составить уравнения одной из таких плоскостей.

**Ответы:**

**4.2.1.** а) ; б)см. рис.103;

**4.2.2.** ;

**4.2.3.** а) ; б) ;

в) ; г) такой плоскости не существует;

д) ;

**4.2.4.**  и ;

**4.2.5.** а) ; б) ; **4.2.6.** а) ; б)  (или );

**4.2.7.** 288;

**4.2.8.** Таких плоскостей семь: плоскость, равноудаленная от точки  и плоскости  и три аналогичных плоскости; также плоскость, равноудаленная от двух скрещивающихся прямых  и  и две аналогичных плоскости.

Найдем уравнение плоскости, равноудаленной от точки  и плоскости . Уравнение плоскости : . Уравнение плоскости, параллельной  и проходящей через точку : . Очевидно, что искомая плоскость параллельна плоскости  и, следовательно, ее уравнение имеет вид . Искомая плоскость должна проходить строго посередине между плоскостями  и , поэтому ее уравнение имеет вид .

Найдем уравнение плоскости, равноудаленной от двух скрещивающихся прямых  и . Эта плоскость должна быть параллельна векторам  и , а, значит, перпендикулярна их векторному произведению . Поэтому, уравнение плоскости имеет вид . Значение постоянной  можно будет определить после изучения уравнений прямой в пространстве.